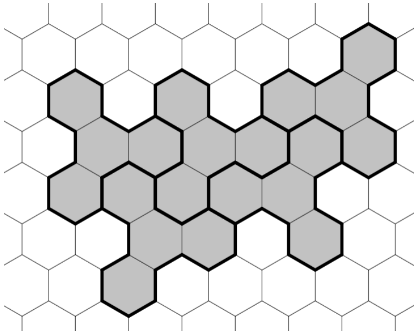
Всесибирская открытая олимпиада школьников
2024-2025 г.г. по математике
Отборочный этап. 8 класс

8.1. Разрежьте данную фигуру по линиям шестиугольной сетки на 5 равных частей.

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



Критерии. Любой верный пример (хотя, кажется, есть всего один правильный вариант разрезания) — 7 баллов.

8.2. Антон стоит на остановке и ждёт трамвай. Так как ждёт он уже очень долго, мальчик подумывает дойти до следующей остановки пешком, но опасается, что подлый трамвай проедет мимо него, когда он будет находиться между остановками. Антон знает, что способен заметить трамвай на расстоянии в 2 км, что до следующей остановки ровно 1 км, и что бегает он в 4 раза раза медленнее трамвая. Может ли Антон со спокойной душой идти до следующей остановки, или есть шанс упустить трамвай?

Решение. Докажем, что Антон может пойти пешком. Пусть он прошёл x км от первой остановки и заметил трамвай в двух километрах от себя.

Если мальчик побежит назад, он встретит трамвай через 2/5 километра, так как при сближении скорость Антона составляет 1/5 от скорости сближения мальчика с трамваем. Значит, если $x \leqslant 2/5$, он сумеет сесть в вагон на остановке, с которой он ушёл.

Если мальчик побежит вперёд, он встретит трамвай через 2/3 километра из аналогичных соображений. Значит, если $x \geqslant 1/3$, Антон сумеет сесть в вагон на следующей остановке.

В силу того, что $2/5 > 1/3$, Антон всегда успеет добежать до какой-либо из остановок и сесть на трамвай.

Критерии. Только ответ или частные случаи — 0 баллов.

Только идея того, что при малом x надо бежать назад, а при большом x надо бежать вперёд — 2 балла.

8.3. В верном примере на возведение в степень девочка Арина заменила одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. У неё получилось выражение $\text{АК}^{\text{С}} = \text{ИОМА}$. Каким мог быть изначальный пример?

Решение. Сразу запишем в таблицу, на какие цифры могут заканчиваться квадраты и кубы натуральных чисел, это пригодится далее.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Заметим, что цифра С не равна 0 и 1, так как из двухзначного числа получается четырёхзначное, и $\text{С} \leqslant 3$, так как даже $10^4 = 10000$ — уже пятизначное число. Значит, это двойка или тройка. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. Пусть $\text{С} = 3$. Тогда $\text{А} < 3$, так как $30^3 > 10000$. Кроме того, $\text{А} \neq 0$, так как это первая цифра числа.

Случай 1.1. Пусть $\text{А} = 1$. Тогда $\text{К} \neq 1$, но куб числа заканчивается на единицу, только если само число заканчивается на единицу. Значит, в этом случае решений нет.

Случай 1.2. Пусть $\text{А} = 2$. Куб числа заканчивается на 2, только если оно само кончается на 8, поэтому $\text{АК} = 28$. Но $28^3 = 21952$, то есть и в этом случае решений нет.

Случай 2. Пусть $\text{С} = 2$. Тогда $\text{А} \geqslant 3$, так как $29^2 = 841 < 1000$. Кроме того, $\text{А} \neq 3, 7, 8$, так как квадраты не заканчиваются на эти цифры. К тому же, если $\text{А} = 5$, то $\text{К} = 5$, и две буквы отвечают одной цифре. Осталось немного перебрать.

Случай 2.1. Пусть $\text{А} = 4$. Тогда $\text{К} = 2$ или $\text{К} = 8$. Цифра 2 уже занята буквой С, поэтому имеем $48^2 = 2304$, что не подходит под ребус (И = С = 2).

Случай 2.2. Пусть А = 6. Тогда К = 4 или К = 6. Цифра 6 уже занята буквой А, поэтому имеем $64^2 = 4096$, что не подходит под ребус (И = К = 4).

Случай 2.3. Пусть А = 9. Тогда К = 3 или К = 7. В первом случае имеем $93^2 = 8649$, что подходит под условие, а во втором $97^2 = 9409$, что не подходит, так как повторяется девятка.

Итого, единственным решением является $93^2 = 8649$.

Критерии. Только верный ответ — 1 балл.

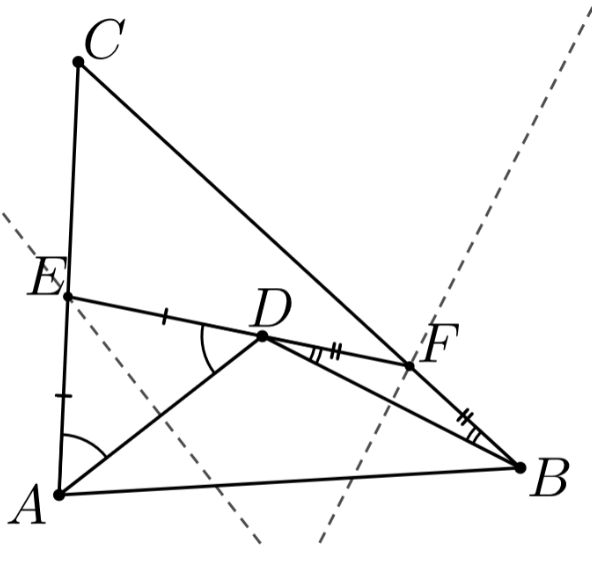
Следующие баллы суммируются.

Доказано, что С = 2 или С = 3 — 2 балла.

Верно рассмотрен случай С = 3 — 2 балла.

Верно рассмотрен случай С = 2 — 3 балла.

8.4. Внутри треугольника ABC выбрана точка D таким образом, что $\angle ADB = 115°$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AD и BD пересекают стороны AC и BC в точках E и F соответственно. Оказалось, что точки E, D и F лежат на одной прямой. Найдите величину угла ACB.



Решение. Так как точки E и F лежат на серединных перпендикулярах, они равноудалены от концов соответствующих отрезков, то есть $AE = ED$ и $BF = FD$. Следовательно, из равнобедренных треугольников AED и BFD имеем равенства углов $\angle EAD = \angle EDA$ и $\angle BFD = \angle BDF$. Тогда

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle EAD - \angle DAB - \angle DBA - \angle DBF =$$
$$= (180^\circ - \angle DAB - \angle DBA) - (\angle EDA + \angle FDB) =$$
$$= \angle ADB - (180^\circ - \angle ADB) = 2\angle ADB - 180^\circ = 230^\circ - 180^\circ = 50^\circ.$$

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Рассмотрение частных случаев расположения точек — 0 баллов.

Замечено только, что $AE = ED$ и $BD = FD$ — 1 балл.

8.5. В НГУ учится 1001 студент. Некоторые из них посещают спецкурсы. Оказалось, что любые два спецкурса, если их посещают хотя бы два общих студента, имеют различное число участников. Докажите, что общее число спецкурсов в НГУ не превосходит миллиона, если на каждый спецкурс ходит по крайней мере 2 человека.

Решение: Рассмотрим сразу общий случай. Пусть студентов у нас всего n. Докажем, что спецкурсов тогда не более $(n-1)^2$.

Рассмотрим все спецкурсы, на которые ходят фиксированное количество $2 \leqslant k \leqslant n$ человек. Пар студентов на одном таком спецкурсе занимается ровно $\frac{k(k-1)}{2}$, а каждая фиксированная пара из всех $\frac{n(n-1)}{2}$ пар студентов НГУ принадлежит максимум одному рассматриваемому спецкурсу, ведь иначе по условию эти спецкурсы должны иметь разное число участников. Следовательно, всего спецкурсов на k студентов может быть не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$.

Просуммируем эту оценку по всем k. Получим, что общее число спецкурсов не превосходит

$$\frac{n(n-1)}{2\cdot 1} + \frac{n(n-1)}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{n\cdot(n-1)} =$$
$$= n(n-1)\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n-1)}\right).$$

Теперь заметим, что $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, то есть оценка переписывается в виде

$$n(n-1)\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right) = \\ = n(n-1)\left(1-\frac{1}{n}\right) = (n-1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Критерии. Доказано, что спецкурсов размера k может быть всего не более $\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$ — 3 балла.

Получена сумма, которая не досчитана до конца — ещё 1 балл.